

**Скалярное произведение двух векторов.****Определение, свойства**

**Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то есть  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 90^\circ$ , то  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ , поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

И обратно: если  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  и векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ненулевые, то  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ , поэтому  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 90^\circ$ , то есть  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

Таким образом, скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – ненулевые векторы, тогда, если:

$\vec{a} \wedge \vec{b}$  – острый, т.е.  $\vec{a} \wedge \vec{b} < 90^\circ$ , то  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) > 0$ , поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

$\vec{a} \wedge \vec{b}$  – тупой, т.е.  $\vec{a} \wedge \vec{b} > 90^\circ$ , то  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0$ , поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;

$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , т.е.  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0^\circ$ , то  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 1$ , поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ;

$\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ , т.е.  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 180^\circ$ , то  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = -1$ , поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется **скалярным квадратом** вектора  $\vec{a}$ . Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ .

**Теорема.** Скалярное произведение векторов  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$  выражается формулой  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ .

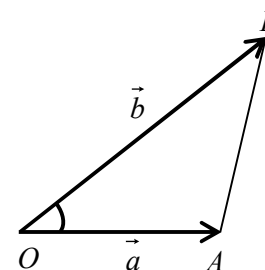
**Дано:**  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$ .

**Доказать:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ .

**Доказательство**

Если хотя бы один из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  нулевой, то справедливость равенства  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$  очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю.

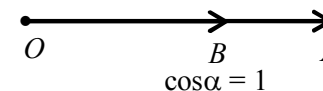
Пусть векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ненулевые.



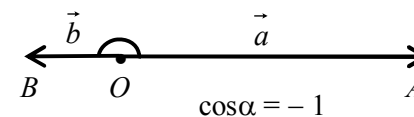
Отложим от произвольной точки  $O$  векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha. \quad (1)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.



$$AB^2 = (OA - OB)^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha.$$



$$AB^2 = (OA + OB)^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha.$$

Так как  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ , то равенство (1) можно записать так:

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}, \\ 2\vec{a}\vec{b} &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2, \\ \vec{a}\vec{b} &= \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$ ,  $\vec{b} - \vec{a} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ , то

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2, |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2, |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (2), получим

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) = \\ &= \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2(x_1x_2 + y_1y_2) = x_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}$$

**Итак,** скалярное произведение векторов  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$  выражается формулой  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ .

**Ч.т.д.**

**Следствие 1.** Ненулевые векторы  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ .

**Следствие 2.** Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$  выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

### Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы соотношения:

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ , причем  $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$  при  $\vec{a} \neq 0$ .
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (переместительный закон).
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (распределительный закон).
- 4)  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (сочетательный закон).

#### Доказательство

Первое свойство непосредственно следует из формулы  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ , а второе свойство – из определения скалярного произведения.

Докажем третье свойство. Введем прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  так:  $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b} \{x_2; y_2\}$ ,  $\vec{c} \{x_3; y_3\}$ . Используя формулу  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ , получаем

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 =$$

$$(x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

**Замечание.** Распределительный закон справедлив для любого числа слагаемых.

Докажем четвертое свойство. Вектор  $k\vec{a}$  имеет координаты  $\{kx_1; ky_1\}$ , поэтому

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

**Ч.т.д.**